Correction de l'épreuve du 15/05/2009

Exercice 1

1). $\hat{H}$ ne dépend pas de φ explicitement, alors (comme $\left[\frac{\partial}{\partial\varphi}, \frac{\partial}{\partial\rho}\right] = \left[\frac{\partial}{\partial\varphi}, \rho\right] = \left[\frac{\partial}{\partial\varphi}, \frac{\partial}{\partial\varphi}\right] = 0$)

nous avons $[\hat{H}, \hat{L}_z] = 0$.

2). On cherche les fonctions propres communes de $\hat{H}$ et $\hat{L}_z$. Toute fonction propre de $\hat{L}_z$ associée à la valeur propre ν ($\in \mathbb{Z}$) a la forme

$$\Psi_\nu(\rho,\varphi) = \psi_\nu(\rho)\, e^{i\nu\varphi} \qquad \left(\text{c'est la solution de } \hat{L}_z \Psi_\nu(\rho,\varphi) = \nu \Psi_\nu(\rho,\varphi)\right)$$

où $\psi_\nu(\rho)$ est une fonction qui ne dépend que de ρ.
En substituant cette forme de $\Psi_\nu(\rho,\varphi)$ dans l'équation de Schrödinger, on obtient :

$$\hat{H}\Psi_\nu(\rho,\varphi) = E\Psi_\nu(\rho,\varphi)$$

$$\Downarrow$$

$$-\left\{\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + iB\frac{\partial}{\partial\varphi} - \frac{B^2\rho^2}{4}\right\}\psi_\nu(\rho)e^{i\nu\varphi} = E\psi_\nu(\rho)e^{i\nu\varphi}$$

$$\Downarrow$$

$$-\left\{\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho} + \frac{1}{\rho^2}(i\nu)^2 + iB\cdot(i\nu) - \frac{B^2\rho^2}{4}\right\}\psi_\nu(\rho) = E\psi_\nu(\rho)$$

d'où on obtient l'équation de Schrödinger radiale vérifiée par $\psi_\nu(\rho)$.

3). Nous avons

$$(1) \qquad \left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho} - \frac{\nu^2}{\rho^2} - \frac{B^2\rho^2}{4} - B\nu + E\right)\psi_\nu(\rho) = 0$$

3.1). $\rho \to 0$. Supposons que

$$\psi_\nu(\rho) \sim C\rho^\alpha + o(\rho^\alpha)$$
$$\psi'_\nu(\rho) \sim C\alpha\rho^{\alpha-1} + o(\rho^{\alpha-1}) \qquad \text{lorsque } \rho \to 0$$
$$\psi''_\nu(\rho) \sim C\alpha(\alpha-1)\rho^{\alpha-2} + o(\rho^{\alpha-2})$$

En substituant dans (1), on a

$$\underbrace{C\alpha(\alpha-1)\rho^{\alpha-2}+o(\rho^{\alpha-2})}_{\psi_\nu''} + \underbrace{C\alpha\rho^{\alpha-2}+o(\rho^{\alpha-2})}_{\frac{1}{\rho}\psi_\nu'} -$$

$$- \underbrace{\nu^2 C\rho^{\alpha-2}+o(\rho^{\alpha-2})}_{\frac{\nu^2}{\rho^2}\psi_\nu} + \underbrace{(E-B\nu)C\rho^{\alpha}+o(\rho^{\alpha})}_{(E-B\nu)\psi_\nu} = 0$$

La puissance dominante de ρ est $\rho^{\alpha-2}$, d'où:

$$C\alpha(\alpha-1)+C\alpha-\nu^2 C=0 \Rightarrow \alpha^2=\nu^2 \Rightarrow \alpha=\pm\nu$$

Donc on peut construire deux solutions $\psi_\nu^\pm(\rho)$ avec le comportement asymptotique

$$\psi_\nu^+(\rho) \sim \rho^{\nu}+o(\rho^{\nu}),$$
$$\psi_\nu^-(\rho) \sim \rho^{-\nu}+o(\rho^{-\nu}).$$

3.2). $\rho\to\infty$. De façon analogue, si on suppose que

$$\psi_\nu(\rho)= C\rho^{\alpha}+o(\rho^{\alpha})$$
$$\psi_\nu'(\rho)= C\alpha\rho^{\alpha-1}+o(\rho^{\alpha-1}) \qquad \text{lorsque } \rho\to\infty$$
$$\psi_\nu''(\rho)= C\alpha(\alpha-1)\rho^{\alpha-2}+o(\rho^{\alpha-2}),$$

on obtient la même équation

$$C\alpha(\alpha-1)\rho^{\alpha-2}+o(\rho^{\alpha-2})+C\alpha\rho^{\alpha-2}+o(\rho^{\alpha-2})$$
$$-C\nu^2\rho^{\alpha-2}+o(\rho^{\alpha-2})+(E-B\nu)\cdot C\rho^{\alpha}+o(\rho^{\alpha})=0,$$

mais cette fois-ci la puissance dominante de ρ est ρ^{α} (car $\rho\to\infty \Rightarrow$ "$\rho^{\alpha} \gg \rho^{\alpha-2}$"). Le seul moyen d'annuler le coefficient devant ρ^α est de poser $C=0 \Rightarrow$ contradiction. On considère donc l'expression plus générale :

$$\psi_\nu(\rho) = e^{f(\rho)}$$

(2) $$f'' + (f')^2 + \frac{1}{\rho} f' - \frac{\nu^2}{\rho^2} - \frac{B^2\rho^2}{4} - B\nu + E = 0$$

équation vérifiée par f

$$f = A\rho^d + O(\rho^{d-1})$$

$$f' = Ad\rho^{d-1} + O(\rho^{d-2})$$

$$f'' = Ad(d-1)\rho^{d-2} + O(\rho^{d-3})$$

En substituant dans (2), on a

$$\underbrace{Ad(d-1)\rho^{d-2} + O(\rho^{d-3})}_{f''} + \underbrace{A^2d^2\rho^{2d-2} + O(\rho^{2d-3})}_{(f')^2} +$$

$$+ \underbrace{Ad\,\rho^{d-2} + O(\rho^{d-3})}_{\frac{1}{\rho} f'} - \frac{\nu^2}{\rho^2} + E - B\nu - \frac{B^2\rho^2}{4} = 0.$$

La puissance la plus grande de ρ est soit

- ρ^{2d-2} $\Rightarrow$ $A=0$ pour annuler $\Rightarrow$ contradiction
- ρ^2 $\Rightarrow$ $B=0$ pour annuler $\Rightarrow$ contradiction
- ρ^{2d-2} et ρ^2 qui coïncident $\Rightarrow$ $\begin{cases} A^2d^2 = \frac{B^2}{4} \\ 2d-2 = 2 \end{cases}$

pour annuler cette puissance

Donc $d = 2 \Rightarrow A^2 = \frac{B^2}{16} \Rightarrow A = \pm \frac{B}{4}$.

Par conséquent

$$f = \pm \frac{B}{4}\rho^2 + \beta\rho + \gamma \ln\rho + o(1)$$

$$f' = \pm \frac{B}{2}\rho + \beta + \frac{\gamma}{\rho} + o\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

β, γ sont des coefs inconnus

$$f'' = \pm \frac{B}{2} - \frac{\gamma}{\rho^2} + o\left(\frac{1}{\rho^2}\right)$$

On répète donc la procédure - on substitue ces développements dans (2) et on ne garde que les puissances ≥ 0 de ρ :

$$\underbrace{\pm\frac{B}{2}+o\left(\frac{1}{\rho^2}\right)}_{f''}+\underbrace{\cancel{\frac{B^2}{4}\rho^2}\pm B\beta\rho\pm B\delta+\beta^2+o(1)}_{(f')^2}$$

$$\underbrace{\pm\frac{B}{2}+o(1)}_{\frac{1}{\rho}f'}-\cancel{\frac{B^2\rho^2}{4}}+E-B\vartheta+o(1)=0$$

Donc

$$\pm B\beta\rho\pm B\pm B\delta+\beta^2+E-B\vartheta=0+o(1)$$

et par conséquent $\beta=0$ et

$$\pm B\pm B\delta+E-B\vartheta=0\Rightarrow\pm B(1+\delta)=B\vartheta-E$$

$$\Downarrow$$

$$\delta=\pm\frac{B\vartheta-E}{B}-1$$

Donc on obtient les comportements asymptotiques possibles :

$$\psi_\vartheta^{(I)}(\rho\to\infty)\sim\rho^{\frac{B\vartheta-E}{B}-1}e^{B\rho^2/4}\left(1+O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right)$$

$$\psi_\vartheta^{(II)}(\rho\to\infty)\sim\rho^{-\frac{B\vartheta-E}{B}-1}e^{-B\rho^2/4}\left(1+O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right)$$

Exercice 2.

1). Les valeurs propres possibles de $\hat{L}^2$ sont $\ell(\ell+1)$ avec $\ell=0,1,2,\ldots$. Nous avons

$$\ell(\ell+1)=2\Rightarrow\ell^2+\ell-2=0\Rightarrow\begin{array}{l}\ell_1=-2\\ \ell_2=1\end{array}$$

marche pas car <0

Donc $\ell=1$ et, comme

$$m=-\ell,-\ell+1,\ldots,\ell-1,\ell,$$

les valeurs propres possibles de $\hat{L}_z$ sont

$$m=-1,0,1$$

2). Les fonctions propres communes de $\hat{L}^2$ et $\hat{L}_z$ sont les harmoniques sphériques $Y_\ell^m(\theta,\varphi)$. Dans notre cas $\ell=1$ et $m=-1,0,1$, alors il y a trois fonctions :

$$Y_1^{-1}(\theta,\varphi) \quad , \quad Y_1^0(\theta,\varphi) \quad , \quad Y_1^1(\theta,\varphi)$$

On sait que

$$Y_\ell^m(\theta,\varphi) = C_\ell^m \, P_\ell^m(\cos\theta)\, e^{im\varphi}$$

avec
$$\begin{cases} C_\ell^m = \sqrt{\dfrac{2\ell+1}{4\pi}}\sqrt{\dfrac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} \\ P_\ell^m(\cos\theta) = \dfrac{(\sin\theta)^m}{2^\ell\,\ell!}\left[\dfrac{d^{\ell+m}}{dz^{\ell+m}}(z^2-1)^\ell\right]_{z=\cos\theta} \end{cases}$$

Alors :

i). $\ell=1,\ m=-1 \Rightarrow C_\ell^m = \sqrt{\dfrac{3}{4\pi}}\sqrt{\dfrac{2!}{0!}} = \sqrt{\dfrac{3}{2\pi}}$

$$\Longrightarrow P_\ell^m(\cos\theta) = \frac{(\sin\theta)^{-1}}{2\cdot 1!}\left[\frac{d^0}{dz^0}(z^2-1)\right]_{z=\cos\theta} =$$
$$= \frac{(\sin\theta)^{-1}}{2}(\cos^2\theta-1) = -\frac{\sin\theta}{2}$$

ii). $\ell=1,\ m=0 \Rightarrow C_\ell^m = \sqrt{\dfrac{3}{4\pi}}$

$$\Longrightarrow P_\ell^m(\cos\theta) = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{d}{dz}(z^2-1)\right]_{z=\cos\theta} =$$
$$= \cos\theta$$

iii). $\ell=1,\ m=-1 \Rightarrow C_\ell^m = \sqrt{\dfrac{3}{4\pi}}\sqrt{\dfrac{0!}{2!}} = \sqrt{\dfrac{3}{8\pi}}$

$$\Longrightarrow P_\ell^m(\cos\theta) = \frac{\sin\theta}{2\cdot 1!}\left[\frac{d^2}{dz^2}(z^2-1)\right]_{z=\cos\theta} =$$
$$= \sin\theta$$

Par conséquent, les fonctions propres (orthonormées) sont

$$Y_1^{-1}(\theta,\varphi) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\,\sin\theta\, e^{-i\varphi}$$
$$Y_1^0(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\,\cos\theta$$
$$Y_1^1(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\,\sin\theta\, e^{i\varphi}$$

Exercice 3

On veut montrer que $[\hat{\partial}^{k+1}, \hat{z}] = (k+1)\,\hat{\partial}^{k}$

Induction sur k :

1). Pour $k = 0$ $\quad [\hat{\partial}, \hat{z}] = \hat{\partial}^{0} = 1$, car

$$[\hat{\partial}, \hat{z}]\, f(z) = \frac{\partial}{\partial z}(z f) - z\frac{\partial f}{\partial z} = \cancel{z\frac{\partial f}{\partial z}} + f - \cancel{z\frac{\partial f}{\partial z}} = f.$$

2). Supposons que la relation est vraie pour $k = n$:

$$[\hat{\partial}^{n+1}, \hat{z}] = (n+1)\,\hat{\partial}^{n}$$

et démontrons-la pour $k = n+1$. Effectivement:

$$[\hat{\partial}^{n+2}, \hat{z}] = \hat{\partial}^{n+2}\hat{z} - \hat{z}\,\hat{\partial}^{n+2} =$$

$$= \hat{\partial}\cdot\hat{\partial}^{n+1}\hat{z} \underbrace{- \hat{\partial}\cdot\hat{z}\cdot\hat{\partial}^{n+1} + \hat{\partial}\cdot\hat{z}\cdot\hat{\partial}^{n+1}}_{\text{nous avons ajouté une expression égale à } 0} - \hat{z}\,\hat{\partial}^{n+2} =$$

$$= \hat{\partial}\underbrace{[\hat{\partial}^{n+1}, \hat{z}]}_{\substack{= (n+1)\hat{\partial}^{n} \\ \text{d'après l'hypothèse}}} + \underbrace{[\hat{\partial}, \hat{z}]}_{=1}\,\hat{\partial}^{n+1} = (n+2)\,\hat{\partial}^{n+1}$$

et donc notre relation est démontrée par induction sur k